Universidad de Costa Rica - Escuela de Economía - Teoría Microeconómica 2
Examen Parcial 1 – I Semestre - Prof. Edgar A Robles, Ph.D. – 8 de abril de 2019

Responda todas las preguntas de forma clara, directa, completa y sucinta. En cada respuesta debe mostrar el procedimiento utilizado. Las respuestas deben estar escritas en lapicero, de lo contario no se permitirán reclamos. Cada inciso dentro de cada pregunta tiene la misma ponderación. Tiempo para el examen 120 minutos.

1. La función de utilidad CES para n bienes (50 puntos)

Un consumidor con un ingreso igual a m tiene una función de utilidad por n bienes igual a:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}, \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \rho \geq 1, \rho \neq \infty$$

a. Encuentre la demanda marshalliana de x_i y muestre que es homogénea de grado 0 en precios e ingreso.

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_j}}{\frac{\partial U}{\partial x_k}} = \frac{-\frac{1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}-1}(-\rho)\alpha_j x_j^{-\rho-1}}{-\frac{1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}-1}(-\rho)\alpha_k x_k^{-\rho-1}} = \frac{\alpha_j}{\alpha_k}\left(\frac{x_k}{x_j}\right)^{1+\rho} = \frac{P_j}{P_k}$$

$$\frac{x_k}{x_j} = \left(\frac{\alpha_k P_j}{\alpha_j P_k}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i = m \rightarrow P_j x_j + \sum_{k \neq j}^{n} P_k x_k = m \rightarrow P_j x_j + \sum_{k \neq j}^{n} P_k \left(\frac{\alpha_k P_j}{\alpha_j P_k}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} x_j = m$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \left(\frac{\alpha_k P_j}{\alpha_j P_k}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} x_j = m$$

$$x_j = \frac{m}{\sum_{k=1}^{n} P_k \left(\frac{\alpha_k P_j}{\alpha_j P_k}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}}$$

$$x_j(\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_n; m) = \frac{\lambda m}{\sum_{k \neq j}^{n} \lambda P_k \left(\frac{\alpha_k \lambda P_j}{\alpha_j \lambda P_k}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}} = x_j(\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_n; m)$$

b. Encuentre la demanda hicksiana de x_i y muestre que esta demanda es homogénea de grado 0 en precios.

$$U^{-\rho} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\frac{\alpha_k P_j}{\alpha_j P_k}\right)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} x_j^{-\rho} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\frac{\alpha_j P_k}{\alpha_k P_j}\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}} x_j^{-\rho}$$

$$\text{ó} \qquad U^{-\rho} = x_j^{-\rho} \left(\frac{P_j}{\alpha_j}\right)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k)^{\frac{1}{1+\rho}} (P_k)^{\frac{\rho}{1+\rho}}$$

$$x_j^H = U \left(\frac{\alpha_j}{P_j}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k)^{\frac{1}{1+\rho}} (P_k)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{1/\rho}$$

$$x_j^H(\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_n) = U \left(\frac{\alpha_j}{\lambda P_j}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k)^{\frac{1}{1+\rho}} (\lambda P_k)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{1/\rho} = x_j^H(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

c. Encuentre la función de costo mínimo y encuentre su grado de homogeneidad en precios.

$$C = \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = U \sum_{j=1}^{n} P_j \left(\frac{\alpha_j}{P_j}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k)^{\frac{1}{1+\rho}} (P_k)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{1/\rho}$$

$$C(\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_n) = \lambda C(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

Es homogénea de grado 1.

d. Encuentre la elasticidad de sustitución de la función de utilidad.

$$ES_{ij} = \frac{\partial ln \frac{x_i}{x_j}}{\partial lnTMS_{ij}} = -\frac{1}{(1+\rho)}$$

2. Curvas de indiferencia cóncavas y convexas (25 puntos)

Sean:

$$a. U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\rho}, \rho > 1, \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

$$b. U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\rho}, \rho > 1, \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

a. Muestre que estas funciones presentan utilidades marginales positivas y crecientes en todos los bienes. Calcule la TMS_{ij} para cada función.

$$a.\quad \frac{\partial U}{\partial x_j} = \rho\alpha_j x_j^{\rho-1}\prod_{i\neq j}^{n}\alpha_i x_i^{\rho} > 0,\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial {x_j}^2} = \rho(\rho-1)\alpha_j x_j^{\rho-2}\prod_{i\neq j}^{n}\alpha_i x_i^{\rho} > 0$$

$$b.\quad \frac{\partial U}{\partial x_j} = \rho\alpha_j x_j^{\rho-1} > 0,\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial {x_j}^2} = \rho(\rho-1)\alpha_j x_j^{\rho-2} > 0$$

$$a.TMS_{ij} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{x_j}{x_i},\qquad b.TMS_{ij} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{\rho-1}$$

b. Explique por qué a pesar de que ambas funciones tienen utilidades marginales crecientes, la TMS_{ij} es un caso es creciente y en el otro es decreciente con el consumo de X_i.

Porque en el primer caso la UM dependen del consumo del otro bien, mientras que en el segundo caso la UM no depende del consumo del otro bien.

c. Encuentre las demandas hicksianas y marshallianas de ambas funciones para todos los bienes.

a.

$$x_i^M = \frac{1}{n}\frac{m}{P_i}$$

$$U = \prod_{j=1}^{n}\alpha_j\left(\frac{\alpha_j P_i}{\alpha_i P_j}x_i\right)^{\rho} \rightarrow U^{1/\rho} = \prod_{j=1}^{n}{\alpha_j}^{1/\rho}\frac{\alpha_j P_i}{\alpha_i P_j}x_i \rightarrow x_i^H = \frac{U^{1/n\rho}}{\prod_{j=1}^{n}\left({\alpha_j}^{1/\rho}\frac{\alpha_j P_i}{\alpha_i P_j}\right)^{1/n}}$$

b. $x_i^M = \frac{m}{P_i},\quad si\ \frac{P_i}{P_j} < \frac{\alpha_i}{\alpha_j}, \forall j;\ x_i^M = 0,\quad si\ \frac{P_i}{P_j} > \frac{\alpha_i}{\alpha_j}, para\ cualquier\ j$

$$x_i^H = \left(\frac{U}{\alpha_i}\right)^{1/\rho},\quad si\ \frac{P_i}{P_j} < \frac{\alpha_i}{\alpha_j}, \forall j;\ x_i^M = 0,\quad si\ \frac{P_i}{P_j} > \frac{\alpha_i}{\alpha_j}, para\ cualquier\ j$$

3. Importancia del efecto ingreso y sustitución (25 puntos)

Para la siguiente función de utilidad, use la ecuación de Slutsky para calcular la porción del cambio total sobre x_i que se atribuye al efecto ingreso y al efecto sustitución causado por un cambio en P_i (Calcule el efecto ingreso y sustitución y calcule la proporción con respecto a la suma de ambos).

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$x_i^M = \frac{1}{n}\frac{m}{P_i}$$

$$P_i x_i = P_j x_j$$

$$U = \prod_{j=1}^{n} x_j = \prod_{j=1}^{n} \frac{P_i x_i}{P_j} \to U^{1/n}\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{1/n} = P_i x_i \to x_i^H = \frac{U^{1/n}\left(\prod_{j=1}^{n} P_j\right)^{1/n}}{P_i}$$

Efecto sustitución:

$$\frac{\partial x_i^H}{\partial P_i} = \left(\frac{1}{n} - 1\right)\frac{U^{1/n}\left(\prod_{j=1}^{n} P_j\right)^{1/n}}{P_i^2}$$

Efecto ingreso:

$$-\frac{\partial x_i^M}{\partial m} x_i^H = -\frac{1}{nP_i}\frac{U^{1/n}\left(\prod_{j=1}^{n} P_j\right)^{1/n}}{P_i} = -\frac{1}{n}\frac{U^{1/n}\left(\prod_{j=1}^{n} P_j\right)^{1/n}}{P_i^2}$$

Efecto ingreso/efecto total:

$$\frac{-\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n} - 1\right) - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

Efecto sustitución/efecto total:

$$\frac{\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{\left(\frac{1}{n} - 1\right) - \frac{1}{n}} = \frac{(n-1)}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$